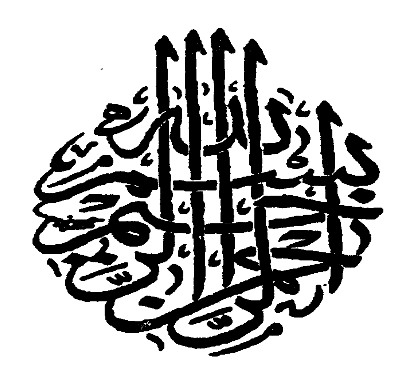
سلسلة : الثقافة الرياضية
إشراف أ. د زكى محمد محمد حسن
أ.د أحمد أمين فوزي
العدد (١٥)

نموذج ميكانيكية العصب عضلي

الأستاذ الدكتور
عادل عبد البصير على
أستاذ الميكانيكا الحيوية و العميد المؤسس لكلية التربية الرياضية ببور فؤاد بورسعيد
جامعة قناة السويس

٢٠٠٤

المكتبة المصرية
للطباعة والنشر والتوزيع
٣ ش أحمد ذو الفقار – لوران الإسكندرية
تليفاكس : ٠٠٢/٠٣/٥٨٤٠٢٩٨
محمول : ٠١٢٣٤٦٨٦٠٤٩



نموذج ميكانيكية العصب عضلى
Mechanical and Neuromuscular modelling

غالباً أبحاث الميكانيكا الحيوية تشتمل على نموذج مبسط لميكانيكا أداء الإنسان فـى أى نشاط، لاشتقاق وحل المعادلات التى تحكم نموذج السـلوك، ومصـداقية إعـادة تكـرار النموذج. أحد النماذج الأكثر استخداماً فى الميكانيكا الحيوية تمثل جسم الإنسان بمجموعـة من الأجزاء الصلبة كشئ مترابط لتطبيق القوى الخارجية والعزوم (مثل تأثير قوة الجاذبيـة Gravity force والعضـلات Muscles والمقيـدات Constrains الـخ)، والمعـادلات المتحكمة فى حركة الأبعاد الثلاثة فى أكثر النماذج ربما يتم الحصـول عليهـا عـن طريـق طرائق متنوعة وترجع إلى أسماء مختلفة أو معادة (مثل معادلات كانتى، ليفينسـون وكـانى Kane, Levinson, Kane ١٩٨٥م)، معـادلات (لاجـرانج Lagrange، جرينـود Greenwood، ١٩٨٨م)، ومعادلات ايلير Euler، ماك جيـل McGill، وكيـنج King (١٩٨٩م)، والمعادلات المكررة المعدلة، هوج Houg (١٩٩٢م)... الخ).

من أجل التبسيط النسبى فى معظم نظم الموديلات البيوميكانيكية والحالات النسـبية التى تحتويها معادلات كل من Euler، Lagrange يمكـن إنتـاج الكثيـر مـن النمـاذج المبسطة، هذه هى المعادلات الموجودة والتى ربما يستمر تكرار اسـتخدامها فـى الأبحـاث البيوميكانيكية. هذه المقالة تصفها وعملية اسـتنباطها مـن معـادلات كـل مـن Euler، وLagrange عن طريق نماذج ميكانيكية جسم الإنسان المشتملة علـى الأجـزاء الصـلبة المترابطة بكتلة نهائية حيث يمكن تحديد حركة الثلاث أبعاد للشئ عامة لنظام القوة- العـزم الخارجى ونظام المقيدات تماماً.

تقيدات ومسلمات (افتراضات) Restrictions and Assumptions تكـون قبـل العمليات (الإجراءات) من الأفضل إقرار المقيدات والمسلمات التى تطبق لى التحليل وهى :

نظام النموذج : System model

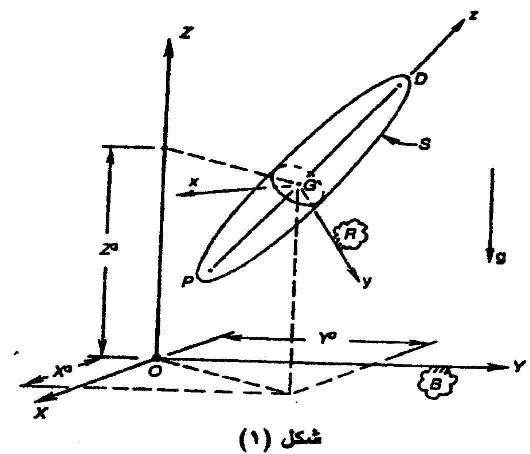
يعاد تمثيل النظام الطبيعى المتخصص (أينما كان داخل جسم الإنسان، أو أجزاء منه) عن طريق تبسيط نموذج ميكانيكى يتكون من تجميع الأجزاء الصلبة المتماسكة المرتبطة عن طريق الوصلات الملساء والكروية (مثل مفصل الكرة والحق). يتضمن نظام تعديل العناصر وتمثيلها أجزاء المفاصل عن طريق نماذج وصلة أكثر تعقيداً (مثل السماح للاتصال النسبى الجزئى فى الوصلة المجاورة التى تقاوم عن طريق الانطلاق، والانتقال) وما خلف القاء الضوء على هذا التحليل.

نظام الإحداثيات والتقيدات : System coordinates and constraints

عامة نموذج نظام حركة الوصلات فى الثلاث أبعاد ممكن، وأيضاً غير مشروط. يقيد نظام الحركة مبدئياً عن طريق الأجزاء المتداخلة للوصلات، ولكن أيضاً بما يضاف من فعل المقيدات على النموذج خلال النشاط التخصصى (مثل اتصال القدم بالأرض... الخ). كذلك لوصف شكل المسار (مثل يتغير الموضع والتوجيه) للجزء الصلب "S" بالضبط يتطلب:

- تخصيص الثلاث إحداثيات المستقلة الخطية مثل الإحداثيات المتعامدة (X, Y, Z) لخصائص موضع النقطة (S) (مثل مركز ثقل الكتلة G) بالنسبة لنقطة الأصل (O) (نقطة تلاقى الإحداثيات المتعامدة الثلاث) لبعض الإحداثيات المتعامدة لنظام شامل Global system أو لإطار مرجعى OXYZ :B (مع اتجاه المحور Z عمودى لأعلى).
- تخصيص الإحداثيات الثلاثة للزاوية المقررة (مثل ϕ, θ, ψ Cardan anagles، أنظر المرفق A) لأصل موضع نظام الإحداثيات المتعامدة المطوقة باحكام لـ(S) (مثل الإطار المرجعى، GXYZ :R، مع المنشأ عند G) بالنسبة لنظام الشامل B.

تعميم الإحداثيات الستة المستقلة ($X^G, Y^G, Z^G, \phi, \theta, \psi$) تستخدم لتخصيص متغير الموضع Local، والمتجه Orientation لـ(S) (أو نظام الموضع R المتحكم فى S عند G) بالنسبة للنظام الشامل B شكل (١).

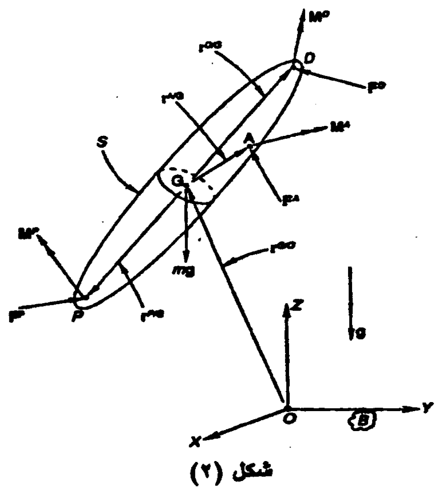


شكل (١)

النظام الإحداثى الشامل B: OXYZ، نقطة أصله O ومحوره Z المتجه عمودياً لأعلى، والجزء الصلب تماماً (S) مع النظام الإحداثى المتعامد لوضعه R: GXYZ الثابت فى S عند CG، النقطة G ومحورها Z حول المحور الطولى Longitudinal axis الهندسى للكتلة المتماثلة الموصلة للنقطة الأدنى P (Proximal) والنقطة الأقصى D,(Distal) للوصلات

القوة الخارجية والازدواج : External force couple system

كل نظام للجزء S الصلب المتماثل له نقطتى اتصال قريبة Proximal (P) وبعيدة Distal (D) عندما تعمل قوة محصلة الوصلة، وقوة محصلة عزومها على S (مثل F^P, M^P عند النقطة P، F^D, M^D عند النقطة D أنظر شكل ٢).



شكل (٢)

عمل مركبات نظام القوة الخارجية عامة- والازدواج على العضو الصلب تماماً

لذلك، يعمل نظام القوة الخارجية- الازدواج على العضو S تماماً ويشتمل على :

أ) F^P, M^P عند P حيث أن P الموضع النسبى من G عن طريق $r^{P/G}$.

ب) F^D, M^D عند D، حيث أن D الموضع النسبى لـــG عن طريق $r^{D/G}$.

جـــ) mg عند G، حيث أن G الموضع النسبى لنقطة الأصل O لنظام الشامل B عـــن طريـــق $r^{G/O}$.

د) F^A, M^A عند A، حيث أن A الموضع النسبى لـــG عن طريق $r^{A/G}$.

محصلة القوة F، ومحصلة العزوم M^G حول G تساعد مع نظام القوة الخارجيـــة- الازدواج كذلك تعطى عن طريق :

$$F = F^P + F^D + F^A + mg \quad (1)$$

$$M^G = (r^{P/G} \times F^P) + (r^{D/G} \times F^D) + (r^{A/G} \times F^A) + M^P + M^D + M^A \quad (2)$$

حيث أن x تشير إلى الاتجاه المنتج.

متجه GXYZ :R فى S، GXYZins : R of Orientation :

من أجل التبسيط والملاءمة لكل جزء صلب فى نظام النموذج سوف نسلم بـأن لـه محور طولى للتماثل الهندسى للكتلة الذى يمر من خلال P، D، والذى كذلك على خط مركز ثقل كتلتها G. نظام الموضع GXYZ :R فى S عند G سوف يكون متجهاً ومثبت فـى S إلى حد أن محاورها Z, Y, X تكون المحاور الأساسية للقصور الذاتى لـ S عنـد G، مـع تطابق المحور Z مع المحور الطولى الهندسى وتماثل الكتلة.

عكس المشكلة الديناميكى : Inversal dynamics problem

المشاكل الميكانيكية التخصصية هنا، واحدة من التى يتكرر مواجهتها فـى الأبحـاث البيوميكانيكية وعممت باسم المشاكل الديناميكية المعكوسة Grownin shield & Brand (١٩٨١م). فى معظم المشاكل المتداولة، مسار شكل النظام الحلقى يكون معروفاً (مثل، تغير زمن الإحداثيات الستة المستقلة المعمة التى تصف شكل كل نظام للعنصر (S) فـى النظـام الشامل (B) المحدد). استخدمت Eulare أو Lagrange) فـى تحديـد المركبـات غيـر المعروفة لنظام القوة الخارجية الازدواج والتى تجمع لإنتاج هذه الحركة المعلومة.

معادلات التحكم : Governing equations

• تدرس هنا فقط العمليات الناتجة من معادلات كل من Euler وLagrange من أجل نموذج نظام الحركة، والطرائق الأخرى للحصول على معادلات نظام الحركة (مثل الطرائـق المتغيرة) خارج نطاق حدود هذه المقالة.

الأسس النظرية : Theoretical basis

نفترض أن القارئ متآلف على المناهج والإجراءات للتحليل الميكانيكى المسـتخدمة لوصف حركة الجسم الصلب فى البعدين (2-D) (مثلاً، نسبياً تعطى المادة لطلبة الكلية علـم الطبيعة (الفيزياء)، الهندسة ومنهج علم الديناميكا (القوة المحركة)، وغالباً تستخدم الكميات المتجهة فى الجبر، والكميات المتجهة فى حساب التفاضل والتكامل، والـتحكم الأولـى فـى

المعادلات المختلفة، والمصفوفات... الخ). ومع مثل هذه الخلفية والجهد الإضافى، يمكن للفرد أن يفهم استعمال انتشار منهجية البعدين لتحليل الثلاث أبعاد لحركة الجسم الصلب عامة.

ملحوظة : مع ذلك، هذا العرض لا يجب اعتباره معالجة شاملة، حتى من أجل المواقف السهلة جداً والتى يستحق وضعها فى الاعتبار.

مهام تمهيدية (أولية) : Preliminary tasks

من المسلم به أن نظام النموذج، نظم الإحداثيات الشاملة والموضع، والإحداثيات المعمة المختارة للعضو، ضرورية لإتمام بعض الأعمال التمهيدية الإضافية قبل تركيب معادلات Euler أو معادلات Lagrange لنظام النموذج.

خصائص القصور الذاتى (براميترات أجزاء الجسم) :

Inertia properties (Body segment parameters)

من أجل كل جزء من (S)، ضرورى التعرف عن طريق التقدير أو القياس المباشر على الكتلة (m)، موضع مركز ثقل كتلة الجسم G، والست مركبات المستقلة ٣×٣= ٩ عناصر، تماثل، مصفوفة القصور الذاتى I^G لمركز الكتلة، عبر عنها باصطلاحات إحداثيات نظام موضع R، تلك الست عناصر المستقلة لمصفوفة القصور الذاتى للعناصر تشتمل على الثلاث عزوم للقصور الذاتى التى تظهر كعناصر قطرية.

$$I^G_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$
$$I^G_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm \qquad (3)$$
$$I^G_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

تظهر الثلاث نواتج للقصور الذاتى متماثلة كأبعاد قطرية للعناصر. (لاحظ الإشارة الجبرية السالبة الاصطلاحية فى هذه التعريفات) :

$$I^G_{xy} = \int - xy\,dm = I^G_{yx}$$
$$I^G_{yz} = \int - yz\,dm = I^G_{zy} \qquad (4)$$
$$I^G_{zx} = \int - zx\,dm = I^G_{xz}$$

كذلك، مصفوفة القصور الذاتى لمركز الكتلة يمكن تفاضل، فى إحداثيات نظام موضع R،

$$I^G = \begin{bmatrix} I^G_{xx} & I^G_{xy} & I^G_{xz} \\ I^G_{yx} & I^G_{xy} & I^G_{yz} \\ I^G_{zx} & I^G_{zy} & I^G_{zz} \end{bmatrix} = (I)^{GT} \qquad (5)$$

حيث أن T ترمز إلى تغيير الموضع، وتشير إلى أن I^G مصفوفة متماثلة.

يلاحظ أنه يسبب كون نظام الموضع R ثبت فى (S) عند G، S صلبة، إحداثيات R للقصور الذاتى لمركز الكتلة I^G تكون ثابتة ولا تتغير عند تحرك (S) فــى النظــام الشــامل (B). ويلاحظ أيضاً أنه من أجل اختلاف الاتجاهات R المثبت فى S، تأخذ عناصر القصــور الذاتى لمركز الكتلة I^G قيم ثابتة مختلفة، وعن McGill & King (١٩٨٩م) يمكن رؤيــة أن هناك دائماً يوجد متجه جزئى خاص من أجل محــور (R) : GXYZ فــى (S) يســمى المحور الرئيسى لمتجه عزم القصور الذاتى، لدرجة أن (أ) جميع النــواتج الثلاثــة لعــزوم القصور الذاتى المستقلة تتلاشى بالتدريج، (ب) تشتمل الثلاث محاور الأساسية المسئولة عن عزوم القصور الذاتى على أكبر وأصغر عزوم للقصور الذاتى الممكنة لجميع المحاور المارة خلال G (مركز الكتلة). بالرجوع إلى المسلمات السابقة إنــه للجــزء S محــور طــولى Z للتماثل الهندسى والكتلة والذى يمر خلال P ,D وتحتوى علــى G ويشــير إلــى العــزوم الأساسية للقصور الذاتى عند G عن طريق :

$$I^G_{xx} = I^G_{yy} = I^G_t ; I^G_{zz} = I_l$$

مصفوفة عزوم القصور الذاتى لمركز كتلة العضو I^G يمكن كذلك توضيحها، لموضع إحداثيات R :

$$I^G = \begin{bmatrix} I^G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I^G_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I^G_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} = (I)^{GT} \qquad (6)$$

الكينماتيكا : **Kinematics**

التصغير : **Letting**

$$q = [X^G, Y^G, Z^G, \phi, \theta, \psi]^T = [q_1 \ldots q_6]^T$$

بالإشارة إلى متجه ٦ × ١ للإحداثيات المعممة القياسية qK (k= ١ و . . . و ٦) للجزء S النموذج، من الضرورى كتابة جميع المعادلات المقيدة المناسبة حيث يجب أن تكون قيم الستة إحداثيات تكفى لكل أجزاء نظام الحركة. وتعتبر هذه المهمة مشكلة خاصة (أنظر المثال التالى) تظهر هنا كنتيجة فى مجموعة كتلة مستقلة، قياسية، مشتقة يمكن دائماً توضيحها فى صورة :

$$C\,(q.\,t) = 0, \qquad (7)$$

حيث أن mx1 للمتجه C= دالة لنظام الإحداثيات العامة qk ولأول فرصة لـزمن، t لأجل نموذج النظام المكون من أعضاء صلبة عددها N، والإحداثيات العامة للمتجـة q فـى المعادلة (٧) تكون متعلقة كست أعضاء صلبة ×7 متجه مركب من جميع N, 6x1 المولـدة لإحداثيات المتجهات للأجزاء الفردية Nonholomic (مثلها المختلفة ولكن ليست لها القدرة على التكامل) ثابتة، واختلافات الثوابت التى تدخل فى التكامل ولكن لم تعثـر عليهـا تتـرك نسبياً ولا تدخل فى هذا التحليل.

تستكمل أعمال الكينماتيكا الأولية باظهار المشتقات لكل سرعة لمركـز ثقـل كتلـة العضو (V^G) والسرعة الزاوية للزاوية Ω (أوميجا) كدوال لتوليد الست إحـداثيات للعضـو لمشتقات زمنها. هذه العملية تقود إلى استخلاص السرعة V^G من العلاقة :

$$V^G = d(r^{G/O})\,dt = d\left(\overset{\bullet}{X}^G_I + \overset{\bullet}{Y}^G_J + \overset{\bullet}{Z}^G_k\right)dt = X^G I + Y^G J + Z^G K \quad (8)$$

حيث تشير النقطة على الحرف إلى اشتقاق الزمن، الحروف K, J, I على التوالى تشير إلى وحدة المتجهات المشتركة الموجبة لكل من Z, Y, X على التوالى للنظام الشامل B. متابعة الزوايا والاختلاف فى أجزاء الإحداثيات المستقل أنظر المرفق (A)، السرعة الزاوية Ω يمكن التعبير عنها فى وضع أجزاء R،

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_z k \quad (9)$$

حيث أن

$$\begin{aligned} \Omega x &= \dot{\phi}\, c\theta\, c\psi + \dot{\theta}\, s\psi, \\ \Omega y &= -\dot{\phi}\, c\theta\, s\psi + \dot{\theta}\, c\psi, \\ \Omega z &= \dot{\phi}\, s\theta + \dot{\Psi}, \end{aligned} \quad (10)$$

مع K, J, I كمتجهات الوحدة يشترك مع محاور Z, Y, X الموجبة نسبياً فى وضع نظام R، والرموز "S" و"C" تشير إلى دوال الجيب وجيب التمام على التوالى.

كمية الحركة الزاوية : Angular momentum

تشتمل المهمة التمهيدية الأخيرة كتابة مصطلح لكل كمية حركة زاوية حول مركز ثقلها G. لوحظت كمية المتجه هذه عن طريق H^G، ويمكن التعبير عنها فى وضع أجزاء R.

$$H^G = I^G\,\Omega = H^G_x i + H^G_y j + H^G_z k, \quad (11)$$

حيث أن :

$$H_x^G = I_{xx}^G \Omega x,$$
$$H_y^G = I_{yy}^G \Omega y, \qquad (12)$$
$$H_z^G = I_{zz}^G \Omega z,$$

معادلات إيولر : Euler's equations

تصف معادلات Euler بتوافق حركة جسم صلب منفرد أو حينما يتجمع معاً، الحركة لمجموعة أجسام صلبة متصلة N. هذه المعادلات تربط القوة الخارجية الناتجة (F) واللحظة الخارجية الناتجة عن مركز الكتلة $G(M^G)$ والتى تمثل كل جسم صلب S إلى الحركة لـ S والتى تقدمها هذه الكميات الكينتيكية. تعتبر معادلات Euler امتداد لقانون نيوتن الثانى للحركة (F=ma) وتعتبر الترتيب الثانى، معادلات تفاضلية عادية والتى تعبر عن القانونين الأول والثانى لايولير للحركة للأنظمة متعددة الذرات ماكجيل وكنج (١٩٨٩م). حينما يكون النظام جسم صلب منفرد مع مركز الكتلة G هذين القانونين يمكن التعبير عنهما كما يلى :

القانون الأول لايولير : Euler's first law

مبدأ حركة مركز الكتلة أو مبدأ كمية الحركة الخطية يأخذ الشكل :

$$F = m\, a^G \qquad (13)$$

حيث أن F= القوة الخارجية التى تعمل فى S (المعادلة ١)، m= كتلة العضو، a^G= عجلة لـ G (قوة القصور الذاتى شكل (٣ب) كما هو معطى عن طريق الاشتقاق الزمنى لـ V^G فى المعادلة (٨)، وبناء عليه معادلة

$$a^G = d\,(V^G)/dt = d\left(\dot{X}^G\, i + \dot{Y}^G\, j + \dot{Z}^G\, k\right)/dt = \left(\ddot{X}^G\, i + \ddot{Y}^G\, j + \ddot{Z}^G\, k\right) \qquad (14)$$

حيث النقطة فوق الحرف المزدوجة تشير إلى الاشتقاق الثانى بالنسبة للزمن (العجلة).

القانون الثانى لايولير : Euler's second law

مبدأ كمية الحركة الزاوية تأخذ الشكل التالى :

$$M^G = \dot{H}^G \,, \qquad (15)$$

حيث أن M= محصلة فعل العزم الخارجى على S حول G كما فـــى المعادلـــة (١)،

$\dot{H}^G$ = كمية الحركة الزاوية كمشتقة بالنسبة للزمن للعضو حول G كما فى المعادلة (١١).

لاحظ أن المعادلة (١١) تعطى $\dot{H}^G$ فى وضع مركبات R، واشتقاق زمنها يمكن التعبير عنه جرين وود (١٩٨٨م).

$$\begin{aligned}\dot{H}^G = &\left[I^G_{xx}\dot{\Omega}x - \left(I^G_{yy} - I^G_{zz}\right)\Omega y\,\Omega z\right]\mathbf{i}\\ &+\left[I^G_{yy}\dot{\Omega}y - \left(I^G_{zz} - I^G_{xx}\right)\Omega z\,\Omega x\right]\mathbf{j} \qquad (17)\\ &+\left[I^G_{zz}\dot{\Omega}z - \left(I^G_{xx} - I^G_{yy}\right)\Omega x\,\Omega y\right]\mathbf{k}\end{aligned}$$

وضع مركبات R لسرعة الزاوية Ω فى المعادلة (١٦) تعطى فـــى المعادلـــة (١٠) واشتقاقات الزمن فى هذه المركبات يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}x &= \ddot{\phi}\, c\theta c\Psi - \dot{\phi}\dot{\theta} s\theta c\Psi - \dot{\phi}\dot{\Psi} c\theta s\Psi + \ddot{\theta}\, s\dot{\Psi} c\Psi\,;\\ \dot{\Omega}y &= \ddot{\phi}\, c\theta s\Psi + \dot{\phi}\dot{\theta} s\theta s\Psi - \dot{\phi}\dot{\Psi} c\theta s\Psi + \ddot{\theta}\, s\Psi - \dot{\theta}\dot{\Psi} s\Psi \qquad (17)\\ \dot{\Omega}z &= \ddot{\phi}\, s\theta + \dot{\phi}\dot{\theta} c\theta + \ddot{\Psi}\end{aligned}$$

وهكذا العضو الصلب الفردى S، ومعادلات ايولير تعتبر نظام لمعـــادلتين مســـتقلتين المتجه (المعادلاتين ١٣، ١٥) أو نظام الست معادلات قياسية مستقلة. تكتب الثلاث معادلات القياسية تبعاً للمعادلة (١٣) فى مركبات B الشامل، والمعـــادلات الثلاثـــة القياســـية وفقـــاً

للمعادلة (١٥) فى مركبات الوضع R، يمكن التعبير عن المعادلات الستة القياسـية لايـولير بالنسبة لحركة S فى المرجع الشامل الشكل B كما يلى :

$$
\begin{aligned}
Fx &= m \dot{X}^{G}, \\
Fy &= m \dot{Y}^{G} \qquad (18) \\
Fz &= m \dot{Z}^{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x^D &= I_{xx}^G \dot{\Omega} x - \left(I_{yy}^G - I_{zz}^G\right)\Omega y \Omega z, \\
M_y^D &= I_{yy}^G \dot{\Omega} y - \left(I_{zz}^G - I_{xx}^G\right)\Omega z \Omega x, \qquad (19) \\
M_z^D &= I_{zz}^G \dot{\Omega} z - \left(I_{xx}^G - I_{yy}^G\right)\Omega x \Omega y
\end{aligned}
$$

حيث أن F من المعادلة (١) معبر عنها فى مركبات B الشاملة كما يلى :

$$F = Fx\, i + Fy\, j + Fz\, k$$

وM^G من المعادلة (٢) معبر عنها فى وضع مركبات R

$$M^G = M_x^G i + M_y^G j + M_z^G k$$

إن استعادة محاور X, Y, Z لـ R هى محاور رئيسية للقصور الذاتى من أجـل S عند G عن طريق :

$$I_{xx}^G = I_{yy}^G = I_t, I_{zz}^G = I_t,$$

وباستخدام المعادلة (١٠) والمعادلة (١٧) والمعادلة (١٩) يمكن إعـادة الصـياغة باصطلاحات الثلاث زوايا لكاردان ومشتقاتها الزمنية.

$$M_x^G = I_t\left(\dot{\phi}c\theta c\Psi + \ddot{\theta}\, s\Psi + \dot{\theta}^2 s\theta s\Psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta c\Psi\right) - I_t\,\dot{\theta}^2 s\theta c\theta s\Psi -$$

$$\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta c\Psi + \dot{\phi}\dot{\Psi} c\theta s\Psi - \dot{\theta}\dot{\Psi} c\Psi;$$

$$M_y^G = I_t\left(-\dot{\phi}c\theta s\Psi + \ddot{\theta}\, c\Psi + \dot{\theta}^2 s\theta c\theta c\Psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta s\Psi\right) - I_t\,\dot{\theta}^2 s\theta c\theta c\Psi + \quad (20)$$

$$\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta s\Psi + \dot{\phi}\dot{\Psi} c\theta s\Psi - \dot{\theta}\dot{\Psi} s\Psi;$$

$$M_z^G = I_t\left(\dot{\phi}s\theta + \dot{\Psi} + \dot{\phi}\dot{\theta}c\theta\right)$$

بالنسبة لجسم فردى صلب S، المعادلات التفاضلية المستقلة الستة لايولير معاً فى معادلات تقليدية جبرية مستقلة m كذلك نظام المعادلات جبرية تفاضلية قياسية m+٦ هوج (١٩٩٢م) التى تحكم حركة S فى شكل المشهد الشامل B عندما ننظر فى مصطلحات مشكلة الديناميكا المعكوسة المشتركة، معادلات الحصر m (معادلة ٧) يمكن استخدامها لتقليل عدد النقاط التى يجب أن تكون أولية لكى تحدد الحركة غير المستقلة لجوانب اليد اليمنى لمعادلات ايولير، وهذه المعادلات حينئذ يمكن حلها للمركبات الستة القياسية غير المعروفة من نظام ازدواج القوى الخارجية المتمثلة فى S.

بالنسبة لنظام النموذج مع أعضاء صلبة متصلة N، نجمع معادلات ايولير القياسية المستقلة 6N معاً مع المعادلات القياسية المستقلة m تشكل نظام من معادلات جبرية تفاضلية قياسية 6N+m والتى تحكم حركة النظام فى شكل المشهد الشامل B عندما ننظر فى مصطلحات مشكلة الديناميكى العكسية المشتركة، معادلات الحصر m (معادلة ٧) يمكن استخدامها لتقليل النقاط التى يجب أن تكون أولية لكى تحدد الحركى غير المستقلة لجوانب اليد اليمنى لتجميع معادلات ايولير وهذا التجميع لمعادلات قياسية 6N يمكن حينئذ أن تحل لمعظم المركبات القياسية 6N لنظام ازدواج القوى الخارجية المشتركة المتحدة.

معادلات لاجرانج : Lagrange's equations

من المحتمل أن تستخدم معادلات لاجرانج لوصف حركة جسم صلب فردى أو حركة النظام لمركبات صلبة متصلة هذه المعادلات التى يمكن أن تشتق من معادلات ايولير لأنظمة متعدد الأجزاء جرين وود (١٩٩٢م).

تنسب حركة المجموعة إلى عزم القوى الخارجية التى تؤدى إلى عمل مؤثر على النظام أثناء ازاحة مؤثرة مقبولة مختصة بالكينماتيكا (ازاحة من الدرجة الأولى أو لانهائية الصغر الذى تكفى كل المقيدات على إحداثيات مطلقة للنظام).

لوحظ هذا لأن القوى الناتجة المتحدة تؤثر على إتمام عمل الأجزاء المجاورة، عمل مؤثر غير محبك على أجسام متعددة (فعل العمل المؤثر على جزء واحد متحد مشترك يكون مساو فى الأهمية لكن العكس فى إشارة جبرية للعمل المؤثر التام على الجزء المتحد المشترك الأخر). هذه القوى التقليدية غير عاملة لا تظهر فى معادلات لاجرانج.

من هنا معادلات لاجرانج لا يمكن أن تستخدم من خلال العلاقة لمشكلة الديناميكى المعكوسة المشتركة، لكى تحدد القوى الناتجة المشتركة المؤثرة على الأجزاء المجاورة فى أنظمة الأجسام المتعددة.

قبل استنباط معادلات لاجرانج بعض المهام التمهيدية الإضافية يجب أن تكتمل، وهذه تشمل المصطلحات مشتقة للطاقة المحركة للنظام (T) وطاقة جهدها التجاذبية V ونظام لاجرانج L وقوتها المطلقة الفعالة G.

طاقة الحركة : Kinetic energy

لكل عضو صلب S طاقة حركية T^s يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$T^s = T^s_v = T^s\Omega \qquad (21)$$

حيث أن :

$$T^s v = (1/2)\, m\, (V^G)^T V^G = (1/2) m \left[\left(\dot{X}^G\right)^2 + \left(\dot{Y}^G\right)^2 + \left(\dot{Z}^G\right)^2 \right] \quad (22)$$

تكون طاقة الحركة الانتقالية :

$$T^s \Omega = (1/2)\, \Omega^T H^G = (1/2) \left[I^G_{xx} (\Omega x)^2 + I^G_{yy} (\Omega y)^2 + I^G_{zz} (\Omega z)^2 \right] \quad (23)$$

تكون طاقة الحركة الدورانية لنظام مكون من N الأعضاء الصلبة المنفصلة، ونظـام طاقة الحركة T ببساطة جبرياً مجموع الطاقات الحركية العضوية

$$T = \Sigma (T^s) \quad (24)$$

طاقة وضع الجاذبية : Gravitational potential energy

لكل عضو S، طاقة وضع الجاذبية V^s يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$V^s = mgz^G \quad (25)$$

حيث أن m هى كتلة العضو، وهى عجلة الجاذبية الأرضية، Z^G ترمز إلى الإحداثى العمودى لـــG فوق المستوى الأفقى Y, X للنظام الشامل B. من أجل أى نظـام للأجــزاء الصلبة المتصلة، يكون نظام طاقة وضع الجاذبية V هو ببساطة حاصــل الجمــع الجبــرى لطاقات وضع الجاذبية العضوية.

$$V = \Sigma (V^s) \quad (26)$$

اللاجرانية : Lagranian

من أجل ميكانيكية النظام المركب من عضو صلب أو أكثر، تحدد اللاجرانية المشتركة L كما يلى :

$$L = T - V \quad (27)$$

حيث أن V, T معطاة فى المعادلتين (٢٤، ٢٦) على التوالى.

المبدأ العام من تفاصيل مختلفة للقوة : Generalized force

المبدأ العام من تفاصيل مختلفة للقوة Q لميكانيكية أى نظام حيث أن nx1 للمبدأ العام من تفاصيل مختلفة للمتجه الإحداثى q يكون المتجه nx1 المتحصل عليها عن طريق عمل فعلى. يحدث δ1N لميكانيكية النظام عن طريق اشتراك نظام ازدواج الحركة الكينماتيكية. وبالرغم من الوصف التفصيلى لمفهوم الشغل الفعلى يكون وراء مجال هذه المقدمة تلخيص وجيز للعملية مطلوب لبناء نشاط المبدأ العام من تفاصيل مختلفة للقوة Q تظهر فى معادلات لاجرانج عرضت فى الملحق B.

$$Q = \Sigma\,[(D^A)^T F^A] + \Sigma\,(J^T M^A) - K^T U \qquad (28)$$

بمطابقة المعادلة (٢٨) مقدار الجانب الأيمن الأول ينفذ على القوى الخارجية F^A المؤثرة على النظام عند نقاط A (ما عدا قوى الجاذبية) المصفوفة المتطابقة D^A تحدد عن طريق سرعة A كما هو معطى بواسطة معادلة (B.1)، مقدار قيمة حاصل الجانب الأيمن الثانى ينفذ على كل العزوم الخارجية N^A المؤثرة على النظام عند نقاط A، المصفوفة المتطابقة J تحدد عن طريق السرعة الزاوية للعضو الذى يحتوى على A كما هو معطى عن طريق معادلة (B.٤) تحدد المصفوفة المحصورة K إذا تواجدت عن طريقة تقيدية أسية تامة معادلة (٧) كما هو معطى عن طريقة معادلة (B.v) وتكون U المتجه المتعدد للاجرانج المتجه مع المتغيرات على إحداثيات مطلقة للنظام.

من أجل نظام ميكانيكى متغير أسمى تام لأعضاء صلبة متصلة حيث يكونها معين عن طريق متجه إحداثى مطلق q مع مركبات qk (k=1,...,n)n، يمكن التعبير عن معادلة لاجرانج كما يلى :

$$d(\delta L/\delta \dot{q}\,k)/dt - \delta L/\delta q_k = Q'_k;\ k = 1, \ldots, n \qquad (29)$$

حيث أن نظام لاجرانج L يحدد عن طريق معادلة (٢٧) متجه Q قوى مطلقة نشطة لنظام لديه مركبات n كما هو معطى Q, K عن طريق المعادلة (٢٨) هكذا، معادلات لاجرانج تكون مجموعة من المعادلات التفاضلية العادية من الترتيب الثانى القياسى المستقل n التى تسبب حركة النظام (المعبر عنها فى مصطلحات الإحداثيات q_k المطلقة للنظام

ومشتقاتهم الزمنية) إلى القوى الخارجية F^A والعزم الخارجى M^A والتغيرات الأسمية التامة U التى تقدم معاً هذه الحركة.

فى غياب التغيرات، احداثيات n المطلقة q_k تعتبر معادلات لاجرانج مستقلة معادلة (٢٩) تشكل نظام من معادلات تفاضلية قياسية مستقلة التى تحكم سلوك النموذج.

عندما ننظر فى العلاقة لمشكلة الديناميكا العكسية المشتركة من هذه المعادلات القياسية n يمكن استخدامها لتوضح على الأكثر مكونات قياسية غير معروفة n من نظام ازدواج القوى الخارجية المشتركة التى تؤدى عمل مؤثر على النظام أثناء ازاحة فعالة لعلم الديناميكا المجرد مع ذلك لو q_k الاحداثيات المطلقة n مقيدة لتكفى المعادلات الاسمية التامة القياسية المستقلة m (يجب أن تلحق معادلة لاجرانج القياسية n معاجلة (٢٩) لكى تشكل معادلات جبرية تفاضلية مناسبة التى تحكم سلوك النموذج.

عندما ننظر فى العلاقة لمشكلة الديناميكا المنعكسة المشتركة فى هذا النظام من معادلات قياسية (n+m)، يمكن أن تستخدم لتغير على الأكثر مركبات قياسية غير معروفة (n+m) من نظام ازدواج القوة الخارجية المشتركة التى تؤدى عمل فعال على النظام أثناء ازاحة مؤثرة مسلم لها لعلم الديناميكا المجرد. للعضو S محور صلب منفرد مع متجه إحداثى مطلق

$$q = [X^G, Y^G, Z^G, \phi, \theta, \Psi]^T = q_1, \dots q_6]^T$$

هذه التحركات فى النظام الشامل B يخضع إلى نظام ازدواج القوة الخارجية مع قوى ناتجة F والعزم الناتج عن $(M^G)^G$ معطى عن طريق المعادلتين (١، ٢) على التوالى ومعادلة لاجرانج (٢٩) يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$m\,\ddot{X}G = Fx,$$
$$m\,\ddot{Y}G = Fy, \qquad (30)$$
$$m\,\ddot{Z}G = Fz$$

$$I_t\left(\ddot{\phi}c^2\theta-2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right)+I_t\left(\ddot{\phi}s^2\theta+\ddot{\Psi}s\theta+2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta+\dot{\theta}\dot{\Psi}c\phi\right)= \quad (31)$$

$$M_x^G c\theta c\Psi - M_y^G c\theta s\Psi + M_z^G s\theta$$

$$I_t\left(\ddot{\theta}+\dot{\phi}^2\ s\theta c\theta\right)-I_t\left(\dot{\phi}^2\ s\theta c\theta+\dot{\phi}\dot{\Psi}c\theta\right)=M_x^G s\Psi - M_y^G c\Psi; \quad (32)$$

$$I_t\left(\dot{\phi}s\theta+\ddot{\Psi}+\dot{\phi}\dot{\theta}c\theta\right)=M_z^G;$$

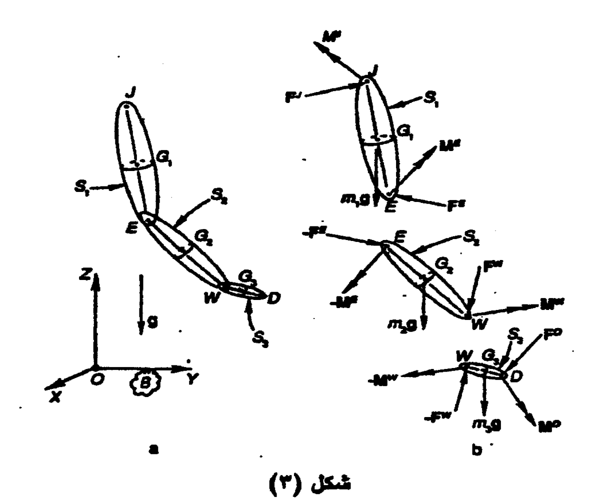
حيث أن F يعبر عنها فى مركبات B الشامل، M^G يعبـــر عنهـــا فـــى مركبـــات R الموضعية.

$$I_{xx}^G = I_{yy}^G = I_i; I_{zz}^G = I_i \quad (33)$$

تطبيقات على معادلات لاجرانج : Application of Lagrange's equations

ربما تستخدم معادلات لاجرانج لوصف سلوك (تصرف) نظم نماذج البحث فى تنـــوع واسع من فحوصات الميكانيكا الحيوية. تستخدم الأمثلة التالية لتوضح اشتقاقهم فى اثنين فى المواقف الجارية الشائعة.

مثال (١) : ثلاث أجزاء، نموذج عقدة واحدة لتوضيح تطبيق معـــادلات لاجـــرانج لأنظمـــة مشـــكلة كتجمعات لأجزاء صلبة كبيرة متصلة عن طريق مفاصل السلسلة الكرويـــة، تعتبـــر الـــثلاث أجزاء الأولى نموذج منحنى مفتوح شكل (٣أ، ب) مثل الطرف العلوى مـــع نقـــاط W, E, J ترمز إلى الكتف والكوع والرسغ على التوالى.



شكل (٣)

(a) ثلاث أجزاء، عقدة مفتوحة، نموذج ميكانيكى من الطرف العلوى يتحرك فى حركة عامة 3-D تنسب إلى نظام B الإحداثى الشامل OXYZ مع نقاط W, E, J تمثل مفاصل الكتف والكوع والرسغ على التوالى

وفى تركيب نموذج هذا النظام يحدد عن طريق ١٢×١ متجه q الإحـــداثى المطلـــق حيث ان أعضاء الثلاثة الأولى لـــq تكون أعضاء B الشاملة المستقلة الثلاثـــة (Z^J, Y^J, X^J) من المتجه $I^{J/O}$ التى تحدد المفصل المتحرك (J) بالنسبة إلى (O) والأجزاء التسعة المتبقية من q تكون المجموعات الثلاثة للزوايا الثلاثة المستقلة لزوايا كردان $(\phi i, \theta i, \Psi i; 1,2, 3)$ التى توجه كل عضو (S_1) من الكتلة (M_1) (أو R_1: $Z_1Y_1X_1G_1$ الراسخة فى S_1 عند G_1 بالنسبة إلى النظام الشامل B لذا :

$$q = [X^j, Y^j, Z^j, \phi_1, \theta_1, \Psi_1, \phi_2, \theta_2, \Psi_2, \phi_3, \theta_3, \Psi_3) = [q_1, \ldots, q_{1]} \quad (34)$$

معادلة اختلاف السرعة لنقطتين G, P المثبة فى العضو S الصلب تأخذ الشكلا تالى جرين وود (١٩٨٨م)

$$V^G = V^P + (\Omega \times r^{G/P}) \quad (35)$$

حيث أن V^G هى سرعة G، Ω هى السرعة الزاوية لــ S (معطاة فــى مصــطلحـات من زوايا فردية لهذا العضو ومشتقاتهم الزمنية عن طريــق معــادلات (٩، ١٠)، V^P هــى سرعة P، $r^{G/P}$ أبعاد G بالنسبة لــ P (وأيضاً يمكن التعبيــر عنهــا بمصــطلحات زوايــا كاردان). من هنا نبدأ بالعضو S_1 والتحرك بعيداً خلال النظــام المتصــل، يمكــن اســتخدام المعادلة (٣٥) بالتتابع لكتابة Y^G لكل عضو كدالة لمركبات الأجزاء q ومشتقاتهم الزمنيــة. عندئذ يمكن استخدام المعادلة (٢١) من خلال المعادلة (٢٤) للتعبيــر عــن نظــام الطاقــة الحركية T كدالة لمركبات q ومشتقاته الزمنية بأسلوب متشابه، قانون إضافة المتجه

$$r^{G/O} = r^{G/P} + r^{P/O} \qquad (36)$$

يمكن استخدام تكرارية ارتباط Z^j لكل عضو إلى Z^j والتسع زوايا لكــاردان التــى توجه الثلاث أعضاء فى النظام الشامل B. وهنا يمكن استخدام المعادلتين (٢٥، ٢٦) للتعبير عن نظام طاقة وضع الجاذبية (V) كدالة لمركبات q.

يعطى نظام لاجرانج L عن طريق المعالة (٢٧) حيث يمكن التعبير عنها حينئذ كدالة لمركبات q ومشتقاته الزمنية، وجوانب اليد اليسرى لمعادلات لاجرانج (المعادلة ٢٩) يمكــن أن تنشأ بطريقة روتينية النظام ١٢×١ لنشاط المبدأ العام من تفاصيل مختلفة لمتجه القوة.

$$Q' = [Q'_1, \ldots Q'_{12}]^T$$

يمكن الحصول عليه عن طريق تشييد عمل مؤثر δW لكــل عضــو S_1 باســتخدام معادلة (ب١٢)، مجموع تلك الثلاثة جبرياً. مقياس يشير إلى شكل العمل الفعال النشط للنظام $\delta W'$، وعندئذ تستخدم المعادلة (ب-١٣) لتحديد القوة القياسية العامة Q'_k المطابقة لكــل إحداثى عام q_k (K=1, …, 12). استرجاع أن قوى الجاذبية تهمل عندما نسحب كل عمــل حيوى لنظام نشاط العضو، وأن محصلة القوى الناتجة للنظام المتداخل للمفصل W, E فعــل شغلها الحيوى على نظام الثلاثة أعضاء صفر تماماً، هذه العملية تقود إلى النتــائج التاليــة (أنظر الرسم البيانى شكل (٣)).

$$\delta W'_3 = \Sigma (\delta W'_i) = \Sigma (Q'_k\, \delta\, q_k) \qquad (37)$$

حيث أن :

$$
\begin{aligned}
\delta W'_3 &= (F^D)^T \delta r^D + (M^D - M^W)^T \delta\pi_3, \\
\delta W'_3 &= (M^W - M^E)^T \delta\pi, \qquad (38) \\
\delta W'_1 &= (F^j)^T \delta r^j + (M^E + M^J)^T \delta\pi_1, \\
\Sigma (Q'_k \delta q_k) &= (F^D)^T \delta r^D + (F^J)^T \delta R^J + (M^J)^T \delta\pi, \\
&\quad + (M^W)^T (\delta\pi_2 - \delta\pi_3) + (M^E)^T (\delta\pi_1 - \delta\pi_2) \qquad (39)
\end{aligned}
$$

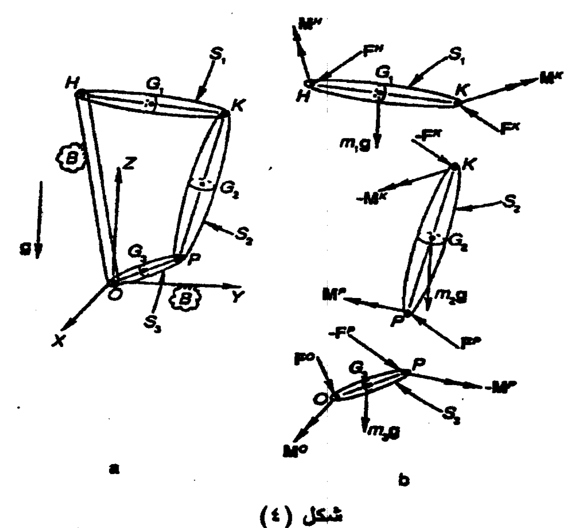
وهنا محصلة القوى عند نظام أطراف المفاصل J, D تساهم فى نشاط القوى القياسية المطلقة Q'_K محصلة عزوم المفصل عند نظام المفاصل المتداخلة E، W تساهم فى معادلات Q'_k كدالة لدوران الحيوى للمفصل (مثل الاختلافات بين الدوران المؤثرة للجزء المجاور).

تحقق القوى المطلقة للنظام Q'_K على الجانب الأيمن لمعادلات لاجرانج (المعادلة ٢٩) من معادلة (٣٩) ومعادلات لاجرانج فى النهاية يمكن عندئذ أن تبنى. عندما ننظر فى العلاقة لمشكلة ديناميكية معكوسة مشتركة، يمكن استخدام هذه المعادلات القياسية المستقلة الاثنى عشر لتحديد على الأكثر ١٢٢ معادلة كيناتيكية قياسية غير معروفة. لأن محصلات M^D, F^D عند D كما هو معروف (إما تطابق مساوى للصفر أو قياس اختيارياً أثناء حركة النظام) تشير المعادلة (٣٩) إلى أن معادلات لاجرانج يمكن استخدامها لتحديد المعادلات غير المعروفة الحركية القياسية الاثنى عشر المتبقية (مثل: لمحصلة قوى المركبات الثلاث غير المعروفة للمفصل F^J عند J + ٣×٣ = ٩ مركبات لمحصلة عزوم المفصل غير المعروفة M^J عند J M^E عند E، M^W عند W).

مثال (٢): أربعة أعضاء، نموذج حلقة مغلق.

كتوضيح ثانى للتطبيق لمعادلات لاجرانج لأنظمة الأجسام المتعددة لأجزاء (الأعضاء) صلبة كبيرة متصلة عن طريق مفاصل كروية، تعتبر أعضاء رباعية، نموذج حلقة مغلق شكل (٤-أ، ب)، مثلاً، الطرف السفلى مضاف لنظام عجلة ثابتة مع ثلاث أعضاء حركية- الفخذ S_1، الساق S_2، القدم S_3- وهى جزء واحد ثابت- شكل العجلة الممتد يصل مركز الترس O وأعلى الفخذ H ومع حلقة متداخلة P, K تعبر عن الركبة وحلقة (تجمع) القدم

على التوالى، لاحظ أن هذا النموذج المبسط لا يسمح بحركة القدم بالنسبة إلى الســاق عنــد مفصل القدم.



شكل (٤)

(a) عضو رباعى، حلقة مغلقة، نموذج ميكانيكى للطرف السفلى + نظام عجلة تتحرك عامة فى ثلاث أبعاد حركية مرتبطة بنظام إحداثى شامل B: OXYZ، مع النقاط P, K, H تمثل أعلى الفخذ والركبة وبدال الروابط على التوالى، (b) أشكال هندسية لأجسام حرة منفصلة لثلاث أعضاء لنظام متحرك

يمكن تحديد شكل نموذج هذا النظام عن طريق ٩×١ لإحداثى متجه q المطلق، حيث التسع مركبات q_k (k=1, ..., 9) هى المجموعات الثلاثة لزوايا كاردان المســتقلة ($\phi_i, \theta_i,$ Ψ_i; 1=1, 2,3) التى توجه كل من حركة العضو Si مع الكتلة mi (أو Ri: Gi Xi Yi Zi) راسخ فى S_1 عند G_1) بالنسبة لنظام الشامل B. على عكس المثال السابق الذى فيه النظام لأجسام متعددة حلقية مفتوحة أخذ فى الاعتبار المركبـات المطلقـة للمتجـه q المسـتخدم لتخصيص شكل هذا النظام الحلقى المغلق الكافى لاسـتقلال المعـادلات الثلاثـة المقيديـة

القياسية. هذه المعادلات المقيدية هى المركبات الثلاثة القياسية لمتجه المعادلة الذى تعبر عنه الحقيقة التى يجب أن تسمح للأربعة أعضاء المتداخلة فى النظام للتشكون الحلقى المغلق. هذه الحلقة المغلقة يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$r^{H/O} = r^{H/K} + r^{K/P} + r^{P/O} \qquad (40)$$

حيث أن كل موضع متجه نسبى فى المعادلة (٤٠) يمكن كتابته كدالة لمركبات العضو q. لذلك تعتبر المعادلة (٤٠) التقيد الرسمى الذى يمكن كتابته فى شكل المعادلة (٧) حيث أن c تكون دالة لمتجه ٣×١ لمركبات q، والزمن لا يظهر بوضوح.

الإجراءات المماثلة فى الطرق التى تقدمت فى المثال السابق للحلقة المفتوحة، اسهامات العضو الفردية للطاقة الحركية للنظام T، وطاقة جاذبية الوضع V تعتبر البناء الأول فى مصطلحات التسعة القياسية المطلقة لمركبات q_k ومشتقاته الزمنية. إضافة هذه الكميات العضوية لتشكيل نظام الطاقات المتطابق، ينشأ نظام (L) للاجرانج (معادلة ٢٩) يمكن تحديدها عندئذ فى شكل روتينى.

يمكن الحصول على مركبات القوة النشطة المطلقة للعضو Q'_k ٩×١ متجه Q من إحداثيات مطلقة مقيدة، عن طريق تغيير الأعضاء المستخدمة فى المثال السابق للحلقة المفتوحة حيث الإحداثيات المطلقة q_k كانت غير مقيدة يشمل هذا التغير تقديم متجه U المتعدد لاجرانج ٣×١ غير المعروف فى التعبير لـ Q معطى فى المعادلة (٢٨) حيث العمل المؤثر النشط التام (المنهى) عن طريق تقيدات اسمية يعطى بواسطة المعادلة (١٥-ب) والقوة المطلقة النشطة المتطابقة تعطى عن طريق المعادلة (١٦-ب). هكذا بأسلوب متشابه لهذا المستخدمة فى المثال السابق للحلقة المفتوحة، الشغل المؤثر النشط لنظام حلقى مغلق δW (أنظر أشكال هندسية لجسم حر شكل (٤) يمكن التعبير عنه كما يلى :

$$\delta W' = \Sigma(\delta W'i) + \delta Wc = \Sigma(Q'_k\, \delta q_k) \qquad (41)$$

حيث أن :

$$\begin{aligned} \delta W'_3 &= (M^O - M^P)^T \delta\pi_3, \\ \delta W'_2 &= (M^P - M^K)^T \delta\pi_2, \\ \delta W'_1 &= (M^K - M^H)^T \delta\pi_1, \end{aligned} \qquad (42)$$

و

$$\delta W^c = U^T k \delta q$$

يمثل فعل الشغل الحيوى النشط عن طريق المقيدات. لذا :

$$\Sigma (Q'_k \delta q_k) = (M^O)^T \delta\pi_3 + (M^H)^T \delta\pi + (M^P)^T (\delta\pi_2 - \delta\pi_3) + (M^K) T (\delta\pi_1 - \delta\pi_2) - U^T K \delta q \quad (43)$$

لاحظ أن محصلة قوى المفصل لا تساهم فى كميات Q'_k، ومحصلة العزم عن المفاصل الطرفية H, O تساهم فى الدوران الحيوى المناسب للعضو على التوالى، بينما محصلة عزوم المفصل عند المفاصل المتداخلة P, K تساهم فى الدوران الحيوى المناسب على التوالى (مثل، الاختلافات بين الدوران الحيوى للعضو المجاور).

تحدد التسع مركبات Q'_k لمتجه القوة المطلقة النشطة Q' التى تظهر على الجانب الأيمن لمعادلات لاجرانج (معادلة ٢٩) من المعادلة (٤٣) ومعادلات لاجرانج عندئذ يمكن صياغتها هذه المعادلات التفاضلية القياسية المستقلة التسعة زادت عن الثلاث معادلات التقيدية الجبرية القياسية المستقلة (٤٠) لكى تشكل نظام من معادلات جبرية تفاضلية قياسية الاثنى عشر التى تحكم حركة النظام. عندما ننظر فى العلاقة للمشكلة الحركية المنعكسة المشتركة فهذه المعادلات القياسية يمكن استخدامها لتحديد على الأكثر أجزاء قياسية غير معروفة لعزم وقوى خارجية المطبقة التى تؤدى عمل فعال على النظام أثناء إزاحة فعالة مسلم بها حركياً. لأن المعادلة (٤٣) تشمل ١٥ كمية حركية وقياسية (عزم ناتج لحلقة رباعية، كل مع ثلاث أجزاء قياسية يضاف إليه الأجزاء الثلاثة القياسية لمتجه U للاجرانج المتعدد). حددت المشكلة الحركية العكسية القياسية المشتركة سابقاً عن طريق بعض الطرق الأخرى (عن طريق قياس اختيارى واحد من محصلة العزوم) هذه الصعوبة هى ظاهرة مميزة تشترك مع الحل لكل المشاكل الحركية المنعكسة للحلقة المغلقة غير النسبية سواء استخدمت معادلات ايولير أو معادلات لاجرانج لوصفى حركة النظام.

قبل ترك هذا المثال من المناسب مناقشة المفاهيم الهامة لدرجات الحرية Degrees of freedom والإشارة إلى كيف يمكن تقديم المقيدات البسيطة على المفصل فى التحليل

ببساطة عدد درجات الحرية لأى نظام ميكانيكى هى عدد المركبات المطلقة المستخد لتخصيص شكله (n) مطروح منها عدد معادلات التقيد المستقلة لتلك المركبات المطلقة الواجبة خلال حركة النظام (m). لذا فى المثال الأولى حيث أن كانت المركبات غير المقيدة ١٢ استخدمت لوصف شكل النظام، n= ١٢، m= ٥، وعدد درجات الحرية تعادل لذلك ١٢. بالتأكيد، نموذج النظام فى المثال الثانى اشتمل على ٩ مركبات مطلقة التى يجب أن تكفى ثلاث معادلات تقيدية اسمية مستقلة (معادلة ٤٠). فى هذه الحالة n=9، m=3، ولذلك عدد درجات الحرية مهم جداً فى الديناميكا لأن :

أ- خصائص أى نظام مستقل لمجموعة خاصة لمركبات مطلقة n تستخدم لوصف شكل النظام.

ب- تشير إلى كيف يكون عدد تلك المركبات.

n مستقلاً

جـ- وهى كذلك تحدد عدد الأحوال الابتدائية التى يمكن تخصيصها بطريقة تحكيمية وبطريقة مستقلة لحل المشكلة الديناميكية بمساعدة مباشرة حيث أن المعادلات التفاضلية للنظام يجب أن تتم للحصول على حل منفرد لحركة النظام (مثال: يعادل العدد مرتين عدد درجات الحرية، وتحديد كل من التشكيل الابتدائى للنظام وحالة سرعته الابتدائية بطريقة فردية)

لتوضيح كيفية التقيدات البسيطة على حركة الفصل يمكن تقديمها بطريقة مناسبة من خلال التحليل، تعتبر التعديل فى المثال الثانى حيث الربط عند النقطة O يكون الآن مدار بسيط مع محورها مثبت لتنسيق مع محور X للنظام B الشامل (أنظر شكل ٤). فى هذه الحالة التوجيه (S3) مفيد منثل هذا كل من θ_3 (q8)، Ψ_3 (q9) يجب أن يظل مساوياً للصفر، أثناء حركة النظام θ_3 (97) ويمكن فقط التنويع. هذا التقيد يمكن افتراضه إما على كل المركبات المطلقة التسعة لكن بالإضافة إلى الثلاث معادلات التقيدية المغلقة الاسمية المستقلة (معادلة ٤٠) اثنين من المعادلات التقيدية الاسمية المستقلة.

$$Q8 = 0; q9 = 0 \qquad (44)$$

من هذا العدد الفريد لدرجات الحرية لهذا النموذج الإضافى لمثال التقيد يعطى إما فى الحالة الأولى عن طريق (٩-٢) -٣ = ٤ أو فى الحالة الثانية ٩-(٣+٢) = ٤. الاختيار

المفضل بين تلك الاختيارين هو الأول لأنه يقلل عدد معادلات لاجرانج التى يجب أن تحدث لتصف حركة النظام مع ذلك معادلات تقيدية اسمية لتقليل عدد المركبات المطلقة ليست دائماً الاختيار الملائم من المنظور التحليلى على سبيل المثال بسبب الطبيعة الفائقة للمعادلات الثلاثة التقيدية (معادلة ٤٠) تعتبر إلى حد ما معرقل لاستخدامها لتقليل المجموعة الابتدائية للمركبات التسعة المطلقة غير المستقلة لمجموعة المركبات الستة المطلقة المستقلة.

مناقشة : Discussion

فيما يلى وصف مختصر لعملية بناء معادلات ايولير ولاجرانج لنماذج ميكانيكية متعددة الأجسام المركبة من أعضاء صلبة كبيرة متداخلة عن طريق روابط ممهدة ومتحركة فى ثلاث أبعاد تخضع إلى نظام ازدواج القوى الخارجية العامة والتقيدات المتطابقة.

مثل هذه النماذج تستخدم غالباً فى فحوصات ميكانيكية حيوية ومعادلات ايولير ولاجرانج بالرغم من الاهتمام الخاص والأهمية لا تعتبر معادلات عادية من الدرجة الثانية فقط التى يمكن أن تحدث وتستخدم لوصف وتحليل سير النموذج.

تذكر أن هناك يوجد معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى تمثل التكامل للحركة (مثل: تكامل طاقة الشغل وتكامل كمية الحركة الخطية والدفع الزاوى) التى ربما تشتق وتستخدم للحصول على معلومات قيمة عن السلوك الحركى للنظام ومن المهم أيضاً ملاحظة أن يوجد الآن تنوع من حزم برامج كمبيوتر تقليدية التى تسهل إنتاج وحل معادلات الحركة والتقيد للنماذج الميكانيكية لأنظمة جسم متعدد متصل.

تشير المادة المقدمة فى هذه المقالة إلى كون نوع من نماذج النظام تراعى معادلات ايولير تكون نوعاً ما أسهل للإنتاج من معادلات لاجرانج، وأن معادلات ايولير يجب أن تستخدم عندما محصلة القوى غير العاملة يشتمل عليها التحليل، معادلات لاجرانج تكون نوعاً ما أكثر صعوبة للمركبات لأنها تتطلب بالإضافة إلى ما يلزم لمعادلات ايولير لاستخدام التصور لعمل فعال ليحدد القوة المطلقة النشطة Q التى تكون مسئولة عن حركة النظام.

مقارنة المجموعة الأولى لايولير للمجموعات الثلاثة (معادلة ١٨) بالمعادلات الثلاث الأولى للاجرانج (معادلة ٣٠) تبين أنهما متطابقتين كذلك بالمثل المعادلة السادسة للاجرانج (معادلة ٣٢) تكون متطابقة للثالثة من المعادلات الثلاث من مجموعة ايولير الثانية (معادلة ٢٠).

فى النهاية يمكن عرضها عن طريق معالجة جبرية للمعادلات الجبرية الرابعة والخامسة للاجرانج (معادلة ٣١) يمكن الحصول عليها كتركيبات خطية للمعادلات الثلاثة لمجموعة ايولير الثانية (المعادلة ٢٠) ومن هنا فى مصطلحات لمركبات مطلقة تستخدم فى هذه المقدمة لتحديد تركيب S فى نظام B الشامل، ومعادلات لاجرانج، وايولير تكون معادلات تفاضلية عادية من التركيب الثانى القياسى المستقلة الستة لأنظمة متساوية تماماً ومتطابقة تقريباً التى تحكم حركة الثلاث أبعاد لـ S فى B.

بدون الالتفات إلى أنه سواء كانت معادلات ايولير أو لاجرانج تكون مبنية فإنه من الضرورى دائماً لاختيار مجموعة مناسبة من المركبات المطلقة لوصف تشكيل النظام لإنشاء الاستقلال لكل المعادلات التقليدية. إن هذه المركبات يجب أن تكفى أثناء حركة النظام، هذه العملية ربما تكون مهمة أكثر تحدياً تواجه حتى المحلل المجرب لأنها غالباً تشمل التوازن لأهداف متسارعة أحياناً (بساطة تحليلية ضد سهولة التفسير المادى).

اهتمام خاص فى هذا الاعتبار هو اختيار مركبات ذات زوايا تستخدم لتحديد توجيه الجزء وتتواجد إمكانيات عديدة (زوايا سقوط، زوايا توجيه، زوايا ايولير، زوايا فردية... الخ). الاعتماد على كيفية استخدام معادلات الحركة لتفسير الاتجاه ضد المشكلة الديناميكية المنعكسة، اختيار المركبات ذات زوايا مستقلة (ثلاث زوايا فردية تستخدم فى هذا الفرض ضد تسع زوايا توجيهية غير مستقلة) يمكن أن تؤدى إلى مشاكل عنيفة (مثل gimbal lock) التى تستطيع جعل تكامل معادلات الحركة صعب إذا لم يكن مستحيل.

هناك أمر مهم أيضاً يشترك مع الاختيار لمركبات ذات زوايا إما من أجل أنظمة أجسام متعددة متصلة، كل توجيه جزء يجب أن يحدد بالنسبة إلى نفس هيكل B مرجع شامل

(كما يحدث هنا استخدام زوايا فردية مستقلة لتلائم بساطة التحليل) أو بالنسبة إلى جزء قريب مجاور ما عدا قطاع استشهاد واحد فى النظام المتصل، الاختيار الأخير غالباً يعرقل تحليلياً مع ذلك ربما يؤيد مرتكز على مثل هذه الاعتبارات مثل الأسلوب فى أى حركات متجمعة كثيراً ما توصل (مرونة جزء الحلقة البعيدة إلى جزء الحلقة المجاورة) السهولة المشتركة لحركات الحلقة مسلم بها تقيدية عندما يكون هذا مناسب (معامل الركبة كحلقة التى لا تسمح ابعاد أو قدوم) والقدرة لنسب محصلة القوى والعزم إلى تركيبات حلقية فردية التى تقدم هذه الكميات الحركية (عضلات، أربطة وعظام).

أخيراً يجب أن نتأكد أن كل من معادلات لاجرانج وايولير يمكن استخدامها بتوافق لتحليل ليس فقط حركة الأبعاد الثلاثة لأجزاء صلبة لأنظمة أجسام متعددة ولكن أيضاً لحركات البعدين وحالتهما المتوازنة. فى حالات عديدة شرعية النموذج يتطلب البناء والتفسير بمعادلات الأبعاد الثلاثة للأفراد بأن الأخطاء المشتركة مع النموذج المبسط اختيرت للاستخدام تكون فى الحقيقة يمكن اهمالها ولذلك تجاهلها بطريقة أمنة للنشاط تحت الفحص.

المراجع :

Crowninshield, R.D., & Brand, R.A. (1981). The prediction of forces in joint structures: Distribution of intersegmental resultants. In D.I. Miller (Ed.), Exercise and sports science reviews, Vol. 9 (pp. 159-181). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Greenwood, D.T. (1988). Principles of dynamics (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Haug, E.J. (1992). Intermediate dynamics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. Kane, T.R., & Levinson, D.A. (1985). Dynamics: Theory and applications. New York: McGraw-Hill.

McGill, D.J., & King, W.W. (1989). Engineering mechanics: An introduction to dynamics (2nd ed.). Boston: PWS-Kent. Wittenberg, J. (1977). Dynamics of systems of rigid bodies. Stuttgart: Teubner.

ملحق A
Appendix A
اتجاه الجسم الصلب والسرعة الزاوية باستخدام زوايا كاردان Cardian angles
Rigid body orientation and angular velocity using cardian angles

يشير Wittenberg (١٩٧٧م) إلى أن زوايا كاردان Cardan الثلاثة Ψ, θ, ϕ يختص استخدامها فى توجيه الجزء الصلب S أو توجيه أى موضع لنظام إحداثى متعامد R: GXYZ وجعله جزء لا يتجزأ من S عند مركز ثقله G وبوحدة الكميات المتجهة k, j, i بالنسبة لأى نظام إحداثى شامل متعامد (المحور الذاتى) B: OXYZ (بنقطة أصل O واتجاه المحور Z عمودى لأعلى، ووحدة الكميات المتجهة i, j, k).

من أجل التبسيط والملاءمة نسلم بأن المحور الخاص بنظام الموضع R، والنظام الشامل B global system مبدئياً متماثل (مثل مرور خط G بنقطة الأصل O)، وبداية توجيه R يرمز له بالرمز R_1: $GX_1Y_1Z_1$ بوحدة الكميات المتجهة :

$$i_1 = I;\ j_1 = J;\ k_1 = k$$

للحصول على أى تحكم فى التوجيه النهائى لنظام موضع R (أو S) بالنسبة للنظام الشامل B أقر تتبع الدورانات البسيطة التالية :

١- أى دوران ابتدائى لتوجيه R (Ri) خلال زاوية كاردان ϕ حول المحور Xi =X (شكل A-١)، النتيجة فى اتجاه جديد لى Ri يرمز لها بالرمز R2: $GX_2Y_2Z_2$ بوحدة الكميات المتجهة k, j, i حيث أن :

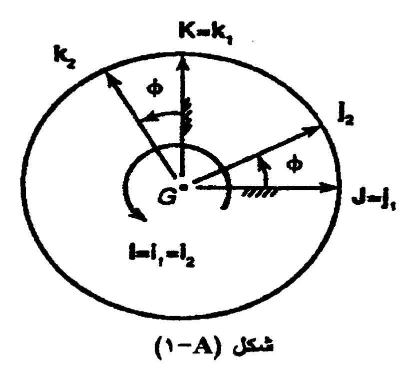
$$\begin{aligned} I &= i_1 = i_2, \\ J &= j_1 = c\phi j_2 - S\phi k_2, \\ K &= k_1 = S\phi j_2 + c\,\phi k_2 \end{aligned} \qquad \text{(A-1)}$$

وتشير الرموز (C)، (S) إلى cos، sin على التوالى، والسرعة الزاوية للمتجه الجديد R2 بالنسبة إلى B =Ri، ويرمز لها بالرمز Ω2/B ويمكن ايضاحها بالعلاقة التالية:

$$\Omega\, 2/B = \dot{\phi}\, i2 \qquad \text{(A-2)}$$

٢- أى دوران فى الوسط لى R2 خلال الزاوية θ لكاردان حول المحور الرأسى Y_2 (شـكل A-٢)، النتيجة اتجاه جديد لى R2 يرمز له بالرمز R3: $GX_3Y_3Z_3$ بوحدة الكمية المتجهة k_3, j_3, i_3 حيث أن :

$$\begin{aligned} i_3 &= c\theta i_3 + s\theta k_3 \\ j_3 &= J_3 \\ k_2 &= - S\,\theta i_3 + c\theta k_3 \end{aligned} \qquad \text{(A-3)}$$

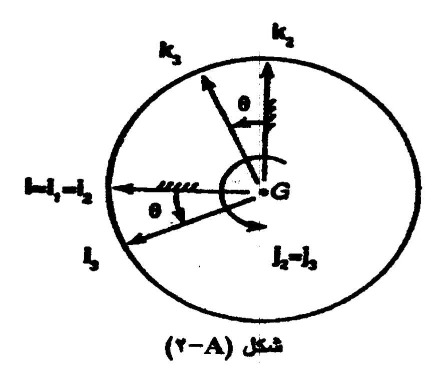


شكل (A-١)

زاوية كاردان ϕ التى توجه وحدة الكميات المتجهة لأول نظام إحداثى متوسط R2: $GX_2Y_2Z_2$ بالنسبة لوحدة الكميات المتجهة k_1, j_1, i_1 لبداية النظام الإحداثى R1: $GX_1Y_1Z_1$ = B: OXYZ (بوحدة الكميات المتجهة k, j, i)

السرعة الزاوية لى R3 بالنسبة إلـى R2، يرمـز لهـا بـالرمز Ω3/2، ويمكـن توضيحها :

$$\Omega_{3/2} = \dot{\phi}\, j_3 \qquad \text{(A-4)}$$



شكل (A-٢)

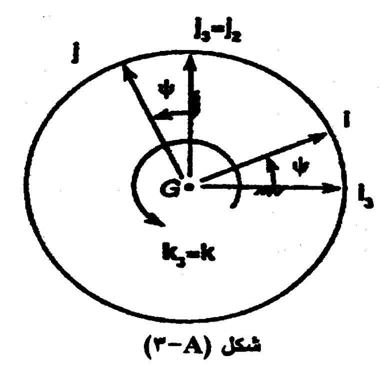
زاوية كاردان التى توجه وحدة الكميات المتجهة k_3, j_3, i_3 للنظام الإحداثى المتوسط الثانى R3: $GX_3Y_3Z_3$ بالنسبة لوحدة الكميات المتجهة k_2, j_2, i_2 للنظام الإحداثى المتوسط الأول R2: $GX_2Y_2Z_2$

٣- الدوران النهائى لى R3 خلال زاوية كاردان Ψ حول المحور Z شكل (A-٣)، النتيجة اتجاه جديد لى R3 يرمز له بالرمز R: GXYZ بوحدة الكميات المتجهة i, j, k حيث أن :

$$\begin{aligned} i_3 &= c\Psi i - s\Psi j \\ j_3 &= S\Psi i + c\Psi j, \\ k_3 &= k \end{aligned} \qquad (A-5)$$

السرعة الزاوية لى R (أو S) بالنسبة لى R3 يرمـز لهـا بـالرمز $\Omega_{R/3}$ ويمكـن توضيحها :

$$\Omega_{R/3} = \dot{\Psi} k \qquad (A-6)$$



شكل (A-٣)

زاوية الدوران لكاردان Ψ التى توجه وحدة الكميات المتجهة k, j, i لموضع نظام الإحداثى R: GXYZ بالنسبة لوحدة الكميات المتجهة k_3, j_3, i_3 للنظام الإحداثى المتوسط الثانى R3: $GX_3Y_3Z_3$

تصغير $\Omega = \Omega_{R/B}$ تشير إلى السرعة الزاوية لى S (أو لموضع نظام R المتحد مع S كجزء واحد عند G) بالنسبة للنظام الشامل B، واستخدام الكميات المتجهة كقانون إضافى، Ω (السرعة الزاوية) يمكن ايضاحها :

$$\Omega = \Omega_{R/3} = \Omega_{R/3} + \Omega_{3/2} + \Omega_{2/B} = \dot{\Psi} k + \dot{\theta} j_2 + \phi i_2 \qquad \text{(A-7)}$$

باستخدام معادلات وحدة الكمية المتجهة للانتقال (A-3)، (A-6)، Ω فى المعادلة (A-7) يمكن إعادة صياغتها فى موضع إحداثيات R.

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega = k \qquad \text{(A-8)}$$

حيث :

$$\Omega_x = \dot{\phi} c\theta c\Psi + \dot{\theta} s\Psi; \ \Omega_y = -\dot{\phi} c\theta s\Psi + \dot{\theta} c\Psi;$$

$$\Omega_z = \dot{\phi} s\theta + \dot{\Psi} \qquad \text{(A-9)}$$

تنبيه : Ω دالة خطية للزمن- ومشتقات الثلاث زوايا لكاردان التى توجــه S فــى النظــام الإحداثى الكروى B. تفاضل مركبات السرعة الزاوية Ω للموضع R فــى المعادلــة (A-9) بالنسبة للزمن يعبر عنها جبراً كما يلى :

$$\dot{\Omega}_x = \dot{\phi}\, c\theta c\Psi - \dot{\phi}\, \dot{\theta}\, s\theta c\Psi - \dot{\phi}\, \dot{\Psi}\, c\, \ddot{\theta}\, s\Psi + \ddot{\theta}\, s\Psi + \dot{\theta}\, \dot{\Psi}\, c\Psi,$$

$$\dot{\Omega}_y = - \ddot{\phi}\, c\theta s\Psi + \dot{\phi}\, \dot{\theta}\, s\theta s\Psi - \dot{\theta}\, \dot{\Psi}\, c\theta c\Psi + \ddot{\theta}\, c\Psi - \dot{\theta}\, \dot{\Psi}\, s\Psi, \qquad \text{(A-10)}$$

$$\dot{\Omega}_z = \ddot{\phi}\, s\theta + \dot{\phi}\, \dot{\theta}\, c\theta + \ddot{\Psi}$$

ملحق B
Appendix B
Virtual work concepts مفاهيم الشغل الفعال

يحدث الشغل الفعال بواسطة القوى الخارجية وفعل العزوم على العضـــو الصـــلب S الذى يمكن الحصول عليه عن طريق تحديد الشغل التام بواسطة هذه الكميـــات الديناميكيـــة، تعامل كمتجهات ثابتة أثناء إزاحة مؤثرة سلم بها حركياً لنقاط تطبيـــق القـــوى والـــدورات المؤثرة المسلم بها حركياً للعضو جرين وود (١٩٨٨م).

Virtual displacements and virtual rotations : ازاحات فعالة ودورات مؤثرة

إزاحة مؤثرة مسلم بها كينماتيكياً لنقطة A مثبتة فى S تكون إزاحة دقيقة جداً لـــA (تفاضلية من الدرجة الأولى) التى تحدث بتوقف وقت ثابت ومتطابق مع التقيدات (معادلة ٧) وبالعكس تكون تعسفية.

إزاحة فعالة لنقطة A المثبتة فى S توجد مباشرة من V^A، متجه ٣×١ الذى يشـــير إلى سرعة A لاستعادة ذلك V^A يمكن دائماً التعبير عنه فى مصطلحات V^A، Ω (جرين وود ١٩٨٨م).

$$V^A = V^G + \Omega \times R^{A/G};$$

حيث $R^{A/G}$ تحدد A بالنسبة إلى G، واستعادة معادلات (٨)، (٩)، (١٠) تشير إلى أن V^G، Ω تكون كل من الوظائف الخطية لأجزاء q الستة، من هنا فإنه من الممكن دائمـــاً التعبير عن V^A فى الشكل (B-١).

$$V^A = D^A \dot{q} + E^A, \qquad \text{(B-1)}$$

حيث D^A تكون دالة مصفوفة ٣×٦ نقطة غير مستقلة مناسبة q وe^A إذا تواجـــدت تكون دالة متجه ٣×١ المتطابق لـــq إعادة كتابة معادلة B-1 فى شكل مثمر.

$$D\, r^{A/O} = D^A\, d\, q + e^A\ d\, t \qquad \text{(B-2)}$$

الإزاحة الفعالة لـــ A المثبتة فى S يشار إليها عن طريق δR^A والتى يمكن الحصول عليها عن طريق إحلال كل d فى معادلة B-2 مع δ وحينئذ تركيب δt = صفر من هنا

$$\delta r^A = D^A \delta q \qquad (B\text{-}3)$$

حيث متجهة ٦×١ $\delta q=\{\delta X^G, \delta Y^G, \delta Z^G, \delta\phi, \phi\Psi\}^T$ تشير إلى التغير الفعال فى متجه مركبات مطلقة للعضو q.

الدوران الفعال S يوجد بطريقة مباشرة من Ω المتجه ٣×١ الذى يشير إلى الدوران الفعال لـــ S لأن المعادلات (٩)، (١٠) تشير إلى أن Ω تكون الدالة الخطيـــة Ω و q يمكـــن التعبير دائماً عنها

$$\Omega = J\dot{q} + h; \qquad (B\text{-}4)$$

حيث J تكون مصفوفة دالة ٣×٦ لـــq جزء غير مستقل مناســب وh إذا تواجــدت تكون دالة متجه ٣×١ لـــq المتطابق واستخدام الافتراض الملائم أن Ω يمكن التعبير عنهـــا كاشتقاق لمتجه ٣×١ π، معادلة B-4، يمكن كتابتها فى شكل تفاضلى

$$D\pi = J\,dq + h\,dt \qquad (B\text{-}5)$$

الدوران المؤثر S يشار إليه عن طريق δπ، ويمكن الحصول عليه عن طريق إحلال كل D فى معادلة B-5 مع δ وحينئذ تركيب δt=0 ومن هنا

$$\delta\pi = J\pi q \qquad (B\text{-}6)$$

إذا قيد متجه q مركبة مطلقة للجزء عن طريق معادلة (٧) حينئذ اشـــتقاق الـــزمن لمعادلة (٧) يجب أيضاً أن يكفى أثناء حركة النظام بأجزاء q ويمكن دائماً كتابتها بالشكل

$$\dot{c} = K\dot{q} + 1 = 0 \qquad (B\text{-}7)$$

حيث K تكون مصفوفة دالة mx6 جزء غير مستقل مناسب q و ١ إذا تواجد يكـــون دالة المتجه mx1 المتطابق q.

إعادة كتابة معادلة B-7 فى شكل تفاضلى مثمر تكون :

$$K\, d\, q + 1\, dt = 0 \qquad (B\text{-}8)$$

المعادلة التقييدية المتجهة التى يجب أن تكفى عن طريق كل التغيرات الفعالة المسلم بها حركياً فى متجه مركبات مطلق للجزء يشار إليها عن طريق δq ويمكن الحصول عليهــا عن طريق استبدال كل d فى المعادلة B-8 مع δ وحينئذ تركب $\delta t=0$ ومن هنا δq المســلم بها حركياً يجب ان تكفى

$$K\, \delta\, q = 0 \qquad (B\text{-}9)$$

عمل مؤثر وقوة فعالة : **Virtual work and generalized force**

العمل المؤثر التام عن طريق قوة F^A تطبق عند نقطة المثبتة فى S ويشار إليهــا عن طريق δW^F يكون العمل التام عن طريق F^A أثناء إزاحة مؤثرة مسلم بها حركياً لــA هكذا

$$\delta W^F = (F^A)^T\, \delta r^A, \qquad (B\text{-}10)$$

حيث F^A تعامل كمتجه ثابت أثناء δr^A والعنوان T يشير إلى التغير بالتشابه للعمل المؤثر التام عن طريق زوج من العزم التام M^A المطبق لــ S عند النقطة A المشار إليهــا عن طريق δW^M يكون العمل التام عن طريق M^A أثناء دوران مؤثر مسلم به حركياً لــــS هكذا

$$\delta W^M = (M^A)^T\, \delta\, \pi \qquad (B\text{-}11)$$

حيث M^A تعامل كمتجه ثابت أثناء $\delta\pi$، العمل المؤثر الإجمالى على S عن طريــق نظام ازدواج القوة الخارجية، يشار إليه عن طريق δW يكون فقط القيمة الجبريــة للعمــل المؤثر التام عن طريق كل قوة وكل عزم خارجى الذى يؤثر فى S هكذا

$$\delta W = \Sigma\,(\delta W^F) + \Sigma\,(\delta W^M) = \Sigma[(F^A)^T\, \delta r^A] + \Sigma[(M^A)^T\, \delta\pi] \quad (B\text{-}12)$$

حيث العنوان A ينوب عن أى نقطة عند أى قوة خارجية F^A أو عزم خــارجى M^A يطبق على S.

معادلات معوض عنها (B-12)، (B-6)، (B-3) تنتج :

$$\delta W = (\Sigma\ [(F^A)^T\ D^A] + \Sigma[(M^A)^T])\ 6\ q - Q^T\ \delta\ q = \delta q^T Q \quad (B-13)$$

حيث (B-14)

$$Q = \Sigma\ [(D^A)^T\ F^A) + \Sigma(J^T M^A) \quad (B-14)$$

تكون المتجه للقوة المطلقة ٦×١ المطابق لقطاع q متجه أحداث مطلق ٦×١.

معادلة (B-14) تستخدم لتحديد Q لحظة القوى الخارجية F^A والعزم الخارجى M^A المؤثر على S قد تحقق ولحظة كل الكميات الحركية المناسبة (D_A لكل قوة F^A، J للجـزء) قد تحددت فى غياب المعادلات التقييدية (معادلات ٧)، أجزاء q تكون مستقلة وعملية تحديد Q من معادلة B-14 تكون مستقيمة وبالرغم من ذلك أحياناً تعارض.

ومع ذلك إذا قيدت أجزاء Q عن طريق المعادلات (٧) أجزاء δq يكون أيضاً غيـر مستقل ويجب أن تكفى معادلة B-9 لكى تكون مسلم بها حركياً، فـى مثـل هـذه الظـروف الاشتقاق لمعادلات لاجرانج تتغير عن طريق استحضار نظرية لاجـرانج المضـعفة (هـوج ١٩٩٢) هذه النظرية تؤكد تواجه متجه μ لاجرانج المضـاعف mx1 الوحيـد لكـن غيـر معروف السبب الذى ينسب إليه مباشرة إلى متجه q القوى المطلقة المشتركة مع التقييدات المحددة عن طريقة معادلة (٧).

العمل المؤثر التام عن طريق هذه التغيرات الاسمية يشار إليهـا عـن طريـق δW ويمكن التعبير عنها

$$\delta W^c = (Q^c)^T\ \delta q = \delta q^T\ Q^c \quad (B-15)$$

حيث

$$Q^c = K^t\ \mu \quad (B-16)$$

تمثل متجه القوة المطلقة المتطابقة للتقييدات الاسمية المعبـر عنهـا عـن طريـق معادلات (٧). المصفوفة التقييدية K وmx6 يمكن الحصـول عليهـا مـن معادلـة (B-7) والإشارة السالبة فى معادلة (B-16) تكون تقليدية عندما δW^c من معادلة (B-15) تحتوى

على معادلة جبرية لعمل مؤثر إجمالى يعطى عن طريق معادلـــة (B-13) متجــه Q القــ ة المطلقة الإجمالية فى معادلة (B-14) تصبح :

$$Q = \Sigma [(D^A)^T F^A] + \Sigma (J^T M^A) - K^T \mu \qquad (B\text{-}17)$$

من هنا منحنى الأحداث المطلق q قيد عن طريق معادلات (٧) متجه القوى المتطابق Q يحدد من معادلة (B-17) من متجه μ للاجرانج mx1 غير المعروف.

لتجنب شمول القوى التجاذبية مرتين فى معادلة لاجرانج (فى طاقة وضع التجاذبيــة V ومرة ثانية فى القوى المطلقة Q) القوى التجاذبية تحذف من المقدار الأول على الجانــب الأيمن لمعادلة (B-17) لكل جزء، وسوف نترك ما يشار إليه هنا مثل متجه القوى المطلقــة النشطة ويشار إليه عن طريق Q لاحظ أن النظام الميكانيكى يتركب من اثنين أو أكثــر مــن الأجزاء الصلبة المتداخلة عن طريق روابط كروية ممهدة، محصلة القوى التى تــؤثر علــى القطاعات المجاورة لا تعمل شبكة عمل مؤثرة على النظام أثناء قبول δq حركياً.

من هنا فهم سوف لا يساهموا لــQ للنظام لذلك يمكن تجاهلهم على العكس مع ذلك على محصلة العزم الذى يؤثر على الأجزاء المتجاورة تفعل عامة بعض العمل الشبكى علــى النظام أثناء δq المسلم به حركياً.

ومن هنا محصلة العزم لا يجب أن ينكر عندما تشيد Q باستخدام معادلة (B-17).

ملحق C

معادلات لاجرانج لقطاع S صلب فردى

استعادة أن (C-1)

$$q = [X^G, Y^G, Z^G, \phi, \theta, \Psi]^T = [q_1, \ldots, q_6]^T$$

تكون المتجه الإحداثى المطلق الذى يحدد تشكيل S فى نظام B الكروى ومحاور النظام الموضعى R: GXYZ تكون المحاور الرئيسية للقصور الذاتى الراسخ فى S عند G مع المحور Z محور طولى لتناسق كتلى وهندسى.

من هنا كل النتائج الثلاثة للقصور الذاتى تتلاشى عندما مصفوفة القصور الذاتى لمركز الكتلة I^G يعبر عنه في موضع أجزاء R والعزم الرئيسى المطابق للقصور الذاتى يمكن التعبير عنه

$$I^G_{xx} = I^G_{yy} = I_t ; I^G_{zz} = I_t \qquad (C-2)$$

سرعة G يشار إليها عن طريق V^G تعطى فى أجزاء B الشامل عن طريق معادلة (٨) وسرعة S ذات الزوايا يشار إليها بواسطة Ω وتعطى فى أجزاء R الموضعية بواسطة معادلة (٩) حيث هذه الأجزاء R من Ω ويعبر عنها فى المصطلحات من أجزاء تكوينات q ومشتقاتهم فى معادلات (١٠) واستخدام معادلات (٢١) إلى أخر (٢٧) للاجرانج لحركة S يمكن الآن التعبير عنها فى مصطلحات لأجزاء Q ومشتقاتهم.

$$L = (1/2)m[(\dot{X}^G)^2 + (\dot{Y}^G)^2 + (\dot{Z}^G)^2] + (1/2)/(\dot{\phi}\, 2c^2\,\theta + \dot{\theta}^2) \quad (C-3)$$
$$+ (1/2)/(\dot{\phi}^2 s^2\theta + 2\dot{\phi}\,\dot{\Psi}\, s\theta + \dot{\Psi}^2) - m\, g\, z^G.$$

باستخدام معادلة (C-3) مصطلحات الجانب الأيسر من معادلات لاجرانج (معادلة ٢٩) يمكن الآن الحصول عليها

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_1)/dt = d(\partial L/\partial \dot{X}^G)/dt = d(m\dot{X}^G)/dt = m\ddot{X}^G;\ \partial L/\partial q_1 = \partial L/\partial X^G = 0$$

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_2)/dt = d(\partial L/\partial \dot{Y}^G)/dt = d(m\dot{Y}^G)/dt = m\ddot{Y}^G;\ \partial L/\partial q_2 = \partial L/\partial Y^G = 0$$

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_3)/dt = d(\partial L/\partial \dot{Z}^G)/dt = d(m\dot{Z}^G)/dt = m\ddot{Z}^G;\ \partial L/\partial q_3 = \partial L/\partial Z^G = -mg$$

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_4)/dt = d(\partial L/\partial \dot{\phi}^G)/dt \setminus d[I_1\ \dot{\phi} c^2\theta + I_1(\dot{\phi} s^2\theta + \dot{\Psi} s\theta)]/dt$$

$$= I_1(\ddot{\phi} c^2\theta - 2\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta c\theta) + \qquad (c\text{-}4)$$

$$I_1(\ddot{\phi} s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} s\theta c\theta + \dot{\Psi} c\theta);\ \partial L/\partial q_4 = \partial L/\partial \phi = 0$$

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_s)/dt = d(\partial L/\partial \dot{\theta})/dt = d(I,\ \dot{\theta})/dt = O_t\ \ddot{\theta};$$

$$\partial L/\partial q_s = \partial L/\partial \theta = -I\ \dot{\phi}^2\ s\theta\ c\theta + I_t(\dot{\phi}^2 s\theta c\theta + \dot{\phi}\ \dot{\Psi} c\theta)$$

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_6)/dt = d(\partial L/\partial \dot{\Psi})/dt = d[I_t(\dot{\phi} s\theta) + \dot{\Psi}]/dt = I_t(\ddot{\phi} s\theta + \dot{\phi}\dot{\theta} c\theta + \ddot{\Psi});$$

$$\partial L/\partial q_6 = \partial L/\partial \Psi = 0$$

للحصول على مصطلحات الجانب الأيمن لمعادلات لاجـرانج (٢٩) أو تكوينـات Q متجه القوى المطلقة النشطة، المعادلة الجبرية للعامل المؤثر يجب أن تبنـى أولاً. اسـتخدم معادلة (B-12) وبحذف القوى التجاذبية من نظام ازدواج القوة الخارجية للجـزء (لتجنـب شمولها مرتين فى معادلة لاجرانج) العمل المؤثر للجزء النشط δW يمكن دائماً التعبير عنه.

$$\delta W' = (F^T \delta r^G) + (M^G)^T\ \delta\pi \qquad (C\text{-}5)$$

حيث القوة الناتجة النشطة للقطاع F تعطى فى مصطلحات للقوى الناتجة للجـزء F (معادلة ١) عن طريق

$$F = (F^P + F^D + F^A) - m\ g\ k = F' - m\ g\ k \qquad (C\text{-}6)$$

المعادلات الجبرية لـــ $\delta\pi,\ \pi r^G$ يمكن الحصول عليها من V^G وΩ نسبياً كما وصف فى الملحق B.

استخدم V^G من معادلة (٨) وΩ من معادلة (A-7) δr^G, $\delta\pi$ يمكن التعبير عـــنهم فى مصطلحات من متجهات الوجودة للنظام B الكروى وR الموضعى والأشكال الاستشهادية الديكارتية المتداخلة $R_1{:}GX_1Y_1Z_1$ (I=1,2,3)

$$\delta r^G = \delta X^G I + \delta Y^G J + \delta Z^G K \qquad (C\text{-}7)$$
$$\delta \pi = \delta \phi I_2 + \delta \phi J_3 + \delta \Psi K \qquad (C\text{-}8)$$

العمل المؤثر الفعال للقطاع δW يعطى بواسطة معادلة (C-5) ويمكن التعبيـــر الآن عنها فى مصطلحات من أجزاء δq

$$\delta W' = [(F')^T I]\, \delta X^G + (F')^T I]\, \delta Y^G + (F')^T I]\, \delta Z^G + \{(M^G)^T i_2\}\delta\phi + \{(M^G)^T j_3\}\delta\theta + \{(M^G)^T k\}\delta\Psi \qquad (C\text{-}9)$$

الشكل المعادل من δW يعطى بواسطة معادلة (B-13) يستخدم لتحقيــق الأجـــزاء لمتجه القوى المطلقة النشطة Q المتطابقة لمتجه الأحداث المطلق q حيث

$$Q' = [Q'_x, Q'_y, Q'_z, Q'_\phi, Q'_\theta, Q'_\Psi]^T = [Q'_1, \ldots, Q'_6]^T \qquad (C\text{-}10)$$

السماح F وF^A يعبر عنهم فى أجزاء B الشامل مثل هذا

$$F = FxI + Fy\, J + Fz\, k = F' - m\, g\, k \qquad (C\text{-}11)$$

and

$$F' = F'xI + F'y\, J + F'z\, k = F'xI + F'yJ + (Fz + m\, g)\, k \qquad (C\text{-}12)$$

والسماح لـــM^G يعبر عنها فى أجزاء R الموضعية فى مثل هذا

$$M^G = M^G{}_x\, j + M^G{}_y\, i + M^G{}_z\, k \qquad (C\text{-}13)$$

الاستخدام لمعادلة (B-13) ومعادلات (C-9) إلى أخر (C-13) تؤدى إلـــى النتـــائج التالية لمصطلحات الجانب الأيمن لمعادلات لاجرانج

$$\begin{aligned}
Q'_x &= (F')^T I = F'_x - F_x;\\
Q'_y &= (F')^T J = F'_y - F_y;\\
Q'_z &= (F')^T K = F'_z = F_z + mg; \qquad (C\text{-}14)\\
Q'_\phi &= (M^G)^T i_2 = M^G{}_x\, c\theta\, c\Psi - M^G{}_y\, c\theta c\Psi + M^G{}_z\, s\theta;\\
Q'_\theta &= (M^G)^T j_3 = M^G{}_x\, s\Psi + M^G{}_y\, c\,\Psi;\\
Q'_\Psi &= (M^G)^T K = M^G{}_z
\end{aligned}$$

استخدام معادلات (C-4) و(C-14) ومعادلات لاجرانج القياسـية السـتة (معـادلات ٢٩) لحركة B Sx الآن يمكن كتابتها فى معادلة :

$$m\ddot{X}^G = F_x;$$

$$m\ddot{Y}^G = F_y;$$

$$m\ddot{Z}^G = F_z;$$

$$I_t(\ddot{\phi}\, c^2\theta - 2\dot{\phi}\,\dot{\theta}\, s\theta c\theta) + I_t(\ddot{\phi}\, s^2\theta + 2\dot{\phi}\,\dot{\theta}\, s\theta c\theta + \ddot{\Psi}\, s\theta + \dot{\theta}\,\dot{\Psi}\, c\theta) \qquad (C\text{-}15)$$

$$= M^G_x\, c\theta c\Psi - M^G_y c\theta s\Psi + M^G_z\, s\theta;$$

$$I_t(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2 s\,\theta c\theta) - I_t(\dot{\phi}^2 s\theta c\theta + \dot{\phi}\,\dot{\Psi}\, c\theta) = M^G_x s\,\Psi + M^G_y c\Psi;$$

$$I_t(\ddot{\phi}\, s\theta + \ddot{\Psi} + \dot{\phi}\,\dot{\theta}\, c\theta) = M^G_z$$